

Das Lösen von linearen Gleichungen

Werden zwei Terme mit einem Gleichheitszeichen verbunden, also $T_1=T_2$, so entsteht eine Gleichung; z.B. $4x+3=11$. Besitzt die Gleichung nur eine Variable oder nur Variablen einer Formen z.B. x-Terme, so nennt man die Gleichung linear, z.B. $9x=24 + 11x$, aber nicht $5y=21+6x$, hier gibt es nämlich verschiedene Variablen.

Ziel ist, den Wert der Variablen zu bestimmen, im Normalfall verwendet der Mathematiker die Variable x und der gängige Arbeitsauftrag lautet, die Gleichung nach x aufzulösen. Im Normalfall nimmt die Variablen nur einen Wert an, es gibt aber auch Fälle, dann nimmt sie zwei Werte, unendlich viele Werte oder gar keinen Wert an. Wir beschränken uns aber zunächst auf die Fälle, bei denen nur eine Lösung für x existiert. Später werden alle Lösungen einer Gleichung in einer Lösungsmenge zusammengefasst (z.B. $IL=\{3\}$).

Bei dem Verfahren, die Gleichung immer weiter zu vereinfachen, muss man darauf achten, dass sich dabei die Lösung(en) nicht verändert. Daher sind nur sogenannte Äquivalenzumformungen zugelassen.

Erlaubt ist:

(1) Additions- und Subtraktionsregel:

Man darf auf beiden Seiten dieselbe Zahl addieren oder subtrahieren.

Bsp.: $x-9=26 \quad | +9$

$x-9+9=26+9$, das führt zu $x=35$, also $IL=\{35\}$

(2) Multiplikations- und Divisionsregel:

Man darf auf beiden Seiten mit derselben Zahl multiplizieren oder durch dieselbe Zahl (ausgenommen 0) dividieren.

Bsp.: $8x=24 \quad | :8$

$8x:8=24:8$, das führt zu $x=3$, also $IL=\{3\}$

Wichtige Strategien beim Lösen von Gleichungen:

Beispiel 1: $4x-5=-3$

A) SORTIEREN

Bringe alle Zahlen auf eine Seite, bevorzugt nach rechts, bringe die x-Terme auf die andere Seite, also hier nach links.

Das passt bei unserem Beispiel schon ganz gut, nur muss die -5 nach rechts.

Also: $4x-5=-3 \quad | +5$, d.h. addiere 5 auf beiden Seiten der Gleichung. Man erhält:

$$4x=+2$$

B) ISOLIEREN

Stelle x „allein“.

Hier steht $4 \cdot x=2$, dann muss das 4 verschwinden. Daher:

$4x = -8$ |:4, d.h. dividere durch 4 auf beiden Seiten der Gleichung. Man erhält:

$$x = \frac{-8}{4}$$

Hinweis: Wenn du eine Vereinfachung durchführst, tue immer das Gegenteil, um 4 zu entfernen, dividiere durch 4, um -5 zu entfernen, addiere 5 usw.

C) LÖSUNGSMENGE ANGEBEN

$$|L = \left\{ \frac{-8}{4} \right\}$$

D) EINE PROBE DURCHFÜHREN

Setze den ermittelten Wert für x in die Ausgangsgleichung ein und überprüfe, ob eine wahre Aussage entsteht:

Nimm: $4x - 5 = -3$, setze für x den Wert $\frac{-8}{4}$ ein: $4 \cdot \frac{-8}{4} - 5 = -3$; Rechnen führt zu: $-8 - 5 = -3$, das ist wahr, also stimmt die ermittelte Lösung.

Beispiel 2: $9 + 6x + 3 - 4x = 5x - 4 - x$

A*) ZUSAMMENFASSEN

Bevor du mit dem Schritt sortieren anfängst, fasse zunächst rechts und links des Gleichheitszeichen gleichartige Glieder zusammen:

$9 + 6x + 3 - 4x = 5x - 4 - x$ führt zunächst zu $12 + 2x = 4x - 4$

A) SORTIEREN

1. die Zahlen nach rechts

$$12 + 2x = 4x - 4 \quad | -12$$

$$2x = 4x - 16$$

2. die x -Terme nach links

$$2x = 4x - 16 \quad | -4x$$

$$-2x = -16$$

B) ISOLIEREN

$$-2x = -16 \quad | :(-2)$$

$$x = 8$$

C) LÖSUNGSMENGE ANGEBEN: $|L = \{8\}$

D) EINE PROBE DURCHFÜHREN: $9 + 6 \cdot 8 + 3 - 4 \cdot 8 = 5 \cdot 8 - 4 - 8$, führt zu $9 + 48 + 3 - 32 = 40 - 4 - 8$, führt zu $57 + 3 - 32 = 36 - 8$, führt zu $60 - 32 = 28$, führt zu $28 = 28$, das ist eine wahre Aussage, also stimmt die Lösung.